1 Logique propositionnelle

Exercice 1 : Soit $\varphi = ((x_1 \to \neg x_2) \to \neg x_1) \wedge x_3$.

1. Écrire l'arbre syntaxique de φ.
2. Donner la table de vérité de φ.
3. φ est-elle valide ? Satisfiable ?
4. Donner la forme normale disjonctive canonique de φ.
5. Donner la forme normale conjonctive canonique de φ.

Exercice 2 : Pour les formules suivantes, dire si ce sont ou non des tautologies. Dans le cas d'une réponse négative, exhiber un contre modèle.

1. $(p_1 \to p_1) \to p_2$
2. $(p_1 \to p_2) \to p_1$
3. $(p_2 \to p_1) \to p_1$
4. $(\neg p_1 \to p_1) \to p_1$
5. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p_3) \to p_2)$
6. $p_1 \to (p_1 \to p_2)$
7. $p_1 \to (p_2 \to p_1)$
8. $p_2 \to (p_1 \to p_1)$
9. $((p_1 \vee p_3) \to p_2) \to ((p_4 \to p_1) \to (p_4 \to p_2))$
10. $(p_1 \to p_2) \to \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$

Exercice 3 : Donner la forme normale disjonctive (resp. conjonctive) canonique des formules de l'exercice 2.

Exercice 4 : On définit le connecteur de Sheffer, ou d'incompatibilité, par $x_1 \diamond x_2 = \neg x_1 \vee \neg x_2$.

1. Construire la table de vérité de $\diamond$.
2. Donner une formule équivalente à $x_1 \diamond x_2$ n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
3. Donner une formule équivalente à $\neg x_1$ n'utilisant que le connecteur $\diamond$.
4. Démontrer par induction structurelle que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule utilisant uniquement le connecteur $\diamond$.

Exercice 5 : Montrer que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que le connecteur $\to$.

Exercice 6 : Appliquer l'algorithme de Quine aux formules suivantes, et dire si elles sont satisfiables (resp. valides) :

1. $(a \to b) \vee (b \to a)$
2. $((a \to b) \to a) \to a$
3. $((a \to b) \to a) \to b$
4. $a \to ((a \to b) \to b)$
5. $((x_1 \to \neg x_2) \to \neg x_1) \wedge x_3$
6. $((p_1 \vee p_3) \to p_2) \to ((p_4 \to p_1) \to (p_4 \to p_2))$
7. $(\neg a \vee (b \wedge c)) \wedge ((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c))$
8. $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$
9. $((a \wedge \neg b) \vee (a \to (b \vee c))) \to (\neg a \wedge \neg c)$
10. $((s \to (b \vee t)) \wedge ((b \vee a) \to (r \wedge m)) \wedge \neg r) \to (s \to t)$
11. $((p \to q) \vee (\neg p \to \neg q)) \wedge (q \wedge r \to \neg p)$

Exercice 7 : Montrer les conséquences logiques suivantes :

1. $(p \wedge q \vee r \wedge \neg(q \vee s)) \vee \neg q \wedge (s \to p) \vDash q \to p$
2. $\varphi \vDash \psi \to \varphi$
3. $\varphi, \varphi \to \psi \vDash \psi$

Exercice 8 (sémantique non-standard) : On définit une sémantique non-standard pour les formules propositionnelles écrites avec $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$ sur un ensemble de 3 valeurs $\mathbb{V} = \{F, V, ?\}$: le faux, le vrai, et l'indéterminé.

On définit la sémantique des différents connecteurs logiques comme suit :

a	$\neg a$
V	F
F	V
$?$	$?$

$\rightarrow$	V	F	$?$
V	V	F	$?$
F	V	V	V
$?$	V	$?$	V

$\vee$	V	F	$?$
V	V	V	V
F	V	F	$?$
$?$	V	$?$	$?$

$\wedge$	V	F	$?$
V	V	F	$?$
F	F	F	F
$?$	$?$	F	$?$

1. Montrer que $p \vee \neg p$ n'est pas une tautologie pour cette sémantique.
2. Donner une tautologie simple (mais utilisant au moins une variable) pour cette sémantique.

2 Logique du premier ordre

Exercice 9 : Soit :

- a et b des symboles de constantes ;
- f (resp. R) un symbole de fonction (resp. relation) unaire ;
- g (resp. S) un symbole de fonction (resp. relation) binaire.

Les expressions suivantes sont-elles des termes ? des formules ? Si oui, quelle en est la taille ? Si c'est une formule, quelles sont ses variables libres et ses variables liées ?

1. $g(a, f(b))$
2. $f(g(f(x), g(a, f(y))))$
3. $g(R(a), b)$
4. $S(f(a), g(x, R(y)))$
5. $(\forall x\ g(x, x) = b) \wedge (\exists x\ f(x) = b)$
6. $\forall x \exists y\ \{S(x, a) \wedge R(b) \rightarrow S(f(b), y)\}$
7. $\forall x\ \{S(a, f(x)) \vee \exists y\ f(y)\}$
8. $R(a, f(x)) \rightarrow S(a, \exists y\ g(y, b) = a)$

Exercice 10 : Pour chacune des formules ci-dessous, identifier ses variables libres et ses variables liées, et donner une formule α-équivalente ayant les propriétés suivantes :

- une même lettre ne représente pas une variable libre et une variable liée ;
- des variables liées différentes n'ont pas le même nom.

1. $\varphi_1 : \forall x \exists y\ \{R(x, y) \wedge S(z, y)\} \rightarrow \exists x\ \{\forall y\ R(x, y) \vee S(x, z)\}$
2. $\varphi_2 : \forall x\ \{R(x, y) \rightarrow \exists x \forall y\ S(y, x)\} \vee \exists z\ \{S(x, z) \rightarrow \exists y \forall x\ R(x, y)\}$
3. $\varphi_3 : \forall x \forall y\ \{R(f(x), a) \rightarrow R(g(a, f(y)), x) \vee [(\exists z \forall x \exists y\ \{R(z, f(x)) \wedge R(z, y)\}) \wedge \exists x \forall z\ R(g(y, z), f(x))]\}$

Exercice 11 : Soit :

- f (resp. R) un symbole de fonction (resp. relation) binaire ;
- $\varphi : \forall z\ \{R(x, z) \wedge R(z, y)\} \rightarrow \forall z\ \{R(z, y) \vee R(x, z)\}$
- $u = f(z, x)$
- $v = g(x, z)$

1. Écrire les formules $\varphi[x := u]$ et $\varphi[y := v]$.
2. Comparer les formules $\varphi[x := u][y := v]$ et $\varphi[y := v][x := u[y := v]]$.
3. Comparer les formules $\varphi[y := v][x := u]$ et $\varphi[x := u][y := v[x := u]]$.