1 Définitions

1. On a le chemin eulérien suivant :

$$A–B–C–D–E–A–D–B–E$$

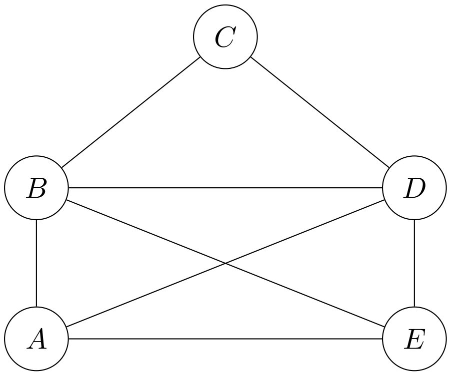

Figure 1 – Le graphe G_1.

2. On a le circuit eulérien suivant :

$$A–C–D–E–B–F–E–G–D–A$$

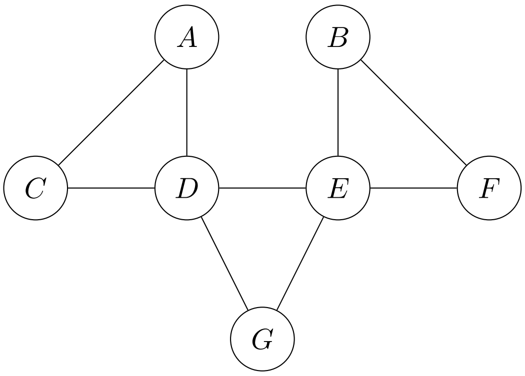

Figure 2 – Le graphe G_2.

2 Condition nécessaire

3. Considérons un circuit eulérien $x_0, x_1, \ldots, x_p = x_0$ (avec p le nombre d'arêtes). Pour chaque occurrence d'un sommet x dans ce cycle, on a deux arêtes incidentes à x : une pour y entrer et une pour en sortir. De plus, le graphe n'ayant pas de boucle, on ne compte jamais une arête deux fois (il n'y a pas de x–x dans le cycle). Le nombre d'arêtes incidentes à x présentes dans le cycle est donc pair, et comme toutes les arêtes du graphe sont dans le cycle une et une seule fois, le degré de x est pair. D'autre part, un sommet n'apparaissant pas dans le cycle est nécessairement de degré nul.
   Ainsi, dans un graphe eulérien, tous les sommets sont de degré pair.
4. Le raisonnement précédent reste valable pour un chemin eulérien, sauf pour les deux extrémités.
   Ainsi, si un graphe possède un chemin eulérien, il y a au plus 2 sommets de degré impair.

3 Condition suffisante

5. Supposons qu'on finissent bloqué en un sommet $y \neq x$. Alors on est "entré" dans y une fois de plus qu'on est "sorti", et on a ce faisant utilisé toutes les arêtes incidentes à y. Donc y est de degré impair : absurde. On termine donc nécessairement en x.

6. S'il n'y a plus d'arête disponible dans les sommets du cycle, cela signifie que ces sommets forment une composante connexe. Le graphe étant connexe, cela signifie que tous les sommets sont dans le cycle, et donc qu'on a épuisé toutes les arêtes du graphe. Ainsi, le cycle est un circuit eulérien.
7. Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. On considère le processus suivant :
   - on part d'un sommet v quelconque, et on construit un cycle C comme décrit plus haut ;
   - tant que C n'est pas un circuit eulérien :
     - on trouve un sommet x de C possédant encore une arête disponible ;
     - on construit un cycle C' autour de x (par le même processus, le graphe ayant toujours ses sommets de degré pair en tenant compte des arêtes retirées) ;
     - on remplace C par sa fusion avec C' : en écrivant $C \; : x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1} = x$ et $C' \; : x = y_0, y_1, \dots, y_{l-1} = x$, on pose $C \; : x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, y_{l-1} = x$.

   À chaque étape, C est un cycle simple, et le nombre d'arêtes disponibles décroit strictement. Le processus se termine donc avec un cycle simple C, qui est un circuit eulérien d'après la question précédente. On en déduit que la condition nécessaire trouvée à la question 3 est suffisante : un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
8. Si le graphe ne possède pas de sommet de degré impair, il a un circuit (et donc un chemin) eulérien d'après la question précédente. S'il possède deux sommets de degré impair, on commence le processus précédent à l'un de ces deux sommets. On termine forcément à l'autre, puis on greffe des cycles supplémentaires sur ce chemin comme précédemment, jusqu'à épuisement des arêtes. Notons qu'il ne peut y avoir un unique sommet de degré impair.
   Combiné à la question 4, on peut conclure que G possède un chemin eulérien si et seulement si il a au plus deux sommets de degré impair.
9. Les résultats précédents s'étendent tels quels aux multigraphes (en définissant bien sûr le degré d'un sommet comme le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet) : il n'y a rien à changer dans la démonstration. Le problème se réduit à la recherche d'un chemin eulérien dans le graphe ci-dessous :

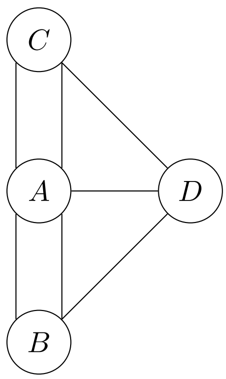

FIGURE 3 – Le graphe de Königsberg.

   Il y a 4 sommets de degré impair, un tel chemin n'existe donc pas.

4 Construction de chemins eulériens

10.
   - En partant de 0.
     - On commence par empiler $0, 1, 2, 0, 7, 0$ dans `actuel`.
     - On dépile $0, 7, 0, 2$ pour arriver en 1 qui a encore des arêtes disponibles.
     - On a alors (sommet à droite) `courant` $= 0, 1$ et `euler` $= 0, 7, 0, 2$.
     - On empile dans `courant` jusqu'à obtenir `courant` $= 0, 1, 3, 4, 1$.
     - On dépile pour obtenir `courant` $= 0, 1, 3$ et `euler` $= 0, 7, 0, 2, 1, 4$.
     - On empile jusqu'à `courant` $= 0, 1, 3, 5, 6, 3$.
     - On dépile jusqu'à `courant` $= \emptyset$ et `euler` $= 0, 7, 0, 2, 1, 4, 3, 6, 5, 3, 1, 0$.

- En partant de 4.
  - On empile $4, 1, 0, 2, 1, 3, 4$.
  - On dépile 4, `euler` $= 4$.
  - On empile $5, 6, 3$, `courant` $= 4, 1, 0, 2, 1, 3, 5, 6, 3$.
  - On dépile $3, 6, 5, 3, 1, 2$. On a `courant` $= 4, 1, 0$ et `euler` $= 4, 3, 6, 5, 3, 1, 2$.
  - On empile $7, 0$, `courant` $= 4, 1, 0, 7, 0$.
  - On dépile tout, `euler` $= 4, 3, 6, 5, 3, 1, 2, 0, 7, 0, 1, 4$.

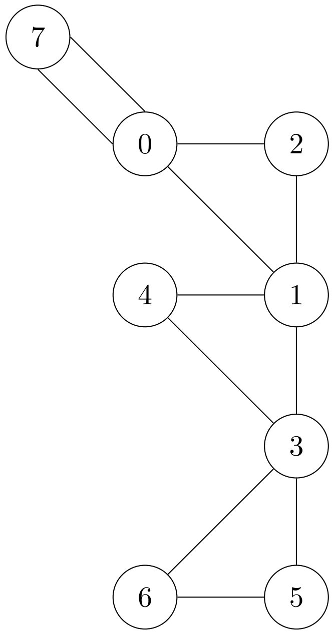

FIGURE 4 – Le graphe G_3.

11. cf. fichier `tp17.c`.
12. cf. fichier `tp17.c`.
13. cf. fichiers `tp17.c` et `g3.txt`.
On peut envoyer le contenu du fichier `g3.txt` sur l'entrée standard du programme `./euler` avec l'instruction suivante :

```
eleve@janson:~$ gcc tp17.c stack.c graph.c -o euler
eleve@janson:~$ ./euler < g3.txt
0 7 0 2 1 4 3 6 5 3 1 0
```

Remarque : comme on affiche le circuit en le dépilant, on l'obtient "à l'envers" (ce qui n'est pas gênant car le graphe est non orienté).

14. Avec les garanties données par le sujet sur la complexité des différentes opérations, on obtient en notant n le nombre de sommets et p le nombre d'arêtes :
    - lecture des données en $\mathcal{O}(p)$;
    - construction du graphe en $\mathcal{O}(n+p)$;
    - construction du parcours en $\mathcal{O}(p)$ (le corps de la boucle est en temps constant, et l'on y passe deux fois pour chaque arête).

    Au total, on a donc une complexité en $\mathcal{O}(n+p)$.
15. Pour un chemin eulérien, l'algorithme n'a aucune raison de fonctionner si l'on part d'un sommet quelconque (si le graphe ne possède pas de circuit eulérien). En revanche, si l'on fait en sorte de partir d'un des deux sommets de degré impair, on va commencer par construire un chemin se terminant à l'autre sommet de degré impair, puis ensuite greffer des cycles sur ce chemin. Il suffit donc de commencer par identifier un somme de degré impair, et par commencer l'exploration à partir de ce sommet.