Logique propositionnelle

MP2I - Informatique

Anthony Lick
Lycée Janson de Sailly

Introduction

Introduction

Exemple : logique propositionnelle

Trois personnes déjeunent ensemble à midi : A, B et C.

On sait que :

- si A prend un dessert, B aussi ;
- soit B, soit C prennent un dessert, mais pas les deux ;
- A ou C prend un dessert ;
- si C prend un dessert, A aussi.

Quelles sont les personnes qui ont pris un dessert ?

Syntaxe de la logique propositionnelle et représentation arborescente

Logique propositionnelle

Définition (logique propositionnelle)

Soit V un ensemble au plus dénombrable de variables logiques, qu'on notera $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$.
L'ensemble des expressions de la **logique propositionnelle** sur V est défini inductivement :

- $\bot$ (lire "**bottom**") et $\top$ (lire "**top**") sont des expressions logiques (aussi notées **Faux** et **Vrai**) ;
- v est une expression logique, pour tout $v \in V$;
- si ψ et φ sont deux expressions logiques, alors les expressions suivantes le sont aussi :
  - $(\psi \wedge \varphi)$ (lire "**et**", opération de **conjonction**) ;
  - $(\psi \vee \varphi)$ (lire **"ou"**, opération de **disjonction**) ;
  - $(\neg\varphi)$ (lire **"non"**, opération de **négation**) ;

Logique propositionnelle

Exemple

$\neg(v_1 \vee v_2)$ ou encore $(v_1 \vee \neg(v_2 \vee v_2))$ sont des expressions de la logique propositionnelle.

$\neg(v_1 \wedge v_2)$ et $(\neg v_1 \vee \neg v_2)$ sont deux expressions logiques différentes.

Représentation arborescente

Arbre syntaxique

Les expressions logiques admettent naturellement une représentation arborescente : les variables logiques et les constantes $\bot$ et $\top$ sont les étiquettes des feuilles, les nœuds internes ayant pour étiquettes les **opérateurs**.

Un nœud d'étiquette $\wedge$ ou $\vee$ est d'arité 2 ; un nœud d'étiquette $\neg$ est d'arité 1.

Cette représentation permet de définir la longueur et la hauteur d'une expression logique.

Représentation arborescente

Définition (hauteur et longueur)

On appelle :

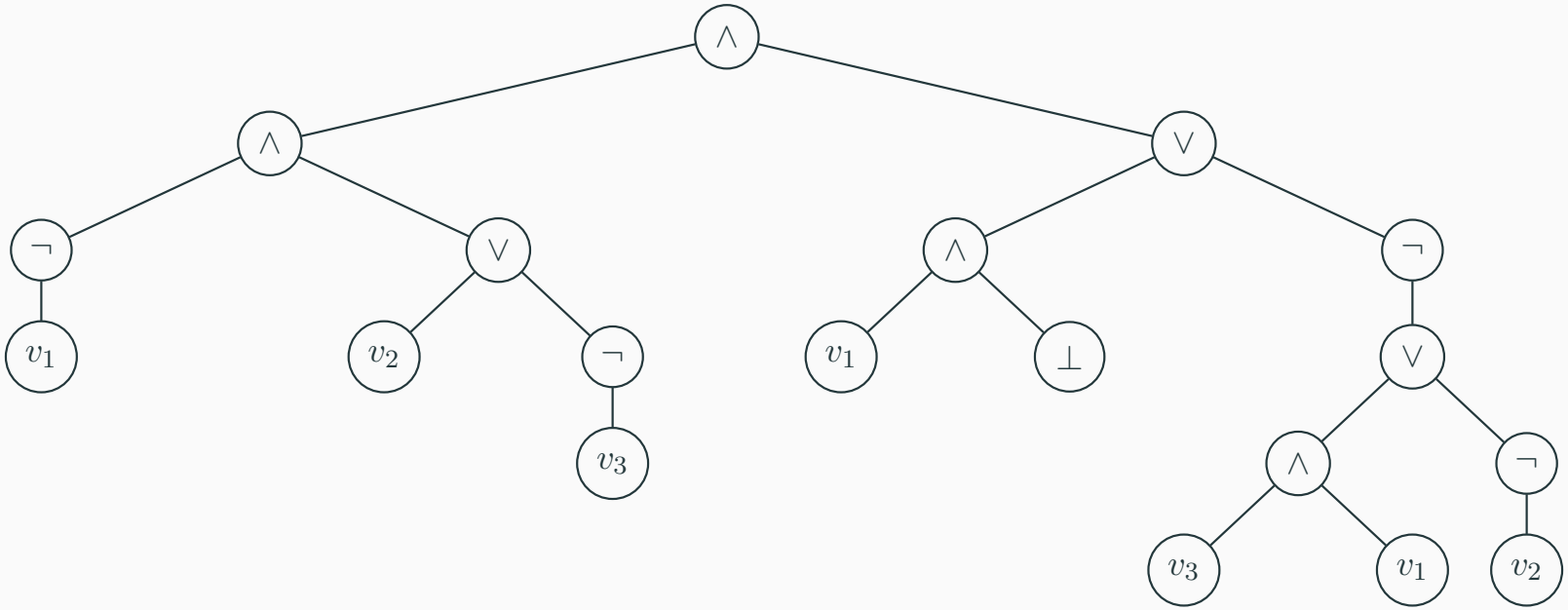
- **hauteur** d'une expression logique la hauteur de son arbre syntaxique ;
- **longueur** d'une expression logique le nombre de nœuds de son arbre syntaxique.

La hauteur et la longueur d'une expression logique peuvent également être définies par **induction**.

Définition (sous-formule)

Soit φ une formule logique.
On appelle **sous-formule** de φ toute formule correspondant à un sous-arbre de l'arbre syntaxique de φ.

Représentation arborescente



Exemple

Voici l'arbre syntaxique de l'expression suivante :

$$(\neg v_1 \wedge (v_2 \vee \neg v_3)) \wedge ((v_1 \wedge \bot) \vee \neg((v_3 \wedge v_1) \vee \neg v_2)$$

Elle est de hauteur 5 et de longueur 19.

Simplification de l'écriture

Simplification

Pour raccourcir l'écriture d'une expression logique, on définit une priorité sur les opérateurs : $\neg$ est prioritaire sur $\wedge$ qui est lui-même prioritaire sur $\vee$.

Implémentation

```
1  type 'a prop =
2    Bot | Top
3    | V of 'a
4    | Et of 'a prop * 'a prop
5    | Ou of 'a prop * 'a prop
6    | Non of 'a prop
7  ;;
```

OCaml

On utilise naturellement un **type inductif** `'a prop` pour implémenter les expressions de la **logique propositionnelle** en **OCaml**.

On utilise un **type polymorphe** pour pouvoir avoir des variables logiques indexées par des entiers, des chaînes de caractères, ou encore tout type à notre convenance.

Implémentation

```
1  let rec longueur e = match e with
2    | Bot | Top | V _ -> 1
3    | Et (g,d) -> 1 + longueur g + longueur d
4    | Ou (g,d) -> 1 + longueur g + longueur d
5    | Non g -> 1 + longueur g
6  ;;
7
8  let rec hauteur e = match e with
9    | Bot | Top | V _ -> 0
10   | Et (g,d) -> 1 + max (hauteur g) (hauteur d)
11   | Ou (g,d) -> 1 + max (hauteur g) (hauteur d)
12   | Non g -> 1 + hauteur g
13 ;;
```

Exemple

Voici deux fonctions permettant de calculer la hauteur et la longueur d'une expression logique.

Implémentation

Exemple

```
# let e = Et
    (Et (Non (V 1), Ou (V 2, Non (V 3))),
     Ou (Et (V 1, Bot),
         Non (Ou (Et (V 3, V 1), Non (V 2)))))
;;
val e : int prop =
  Et (Et (Non (V 1), Ou (V 2, Non (V 3))),
   Ou (Et (V 1, Bot), Non (Ou (Et (V 3, V 1), Non (V 2)))))
# hauteur e ;;
- : int = 5
# longueur e ;;
- : int = 19
```

Exemple

Avec l'exemple précédent, on obtient bien une hauteur 5 et une longueur 19.

Sémantique de la logique propositionnelle

Valuation

Définition (valuation)

Soit V un ensemble fini de variables.

Une **valuation** sur V est une application $V \to \{0, 1\}$.

Remarque

On utilise parfois F et V au lieu de 0 et 1.

Proposition

Si $|V| = n$, il y a 2^n valuations sur V.

Évaluation d'une expression logique

Définition (évaluation)

Soit ν une valuation sur V.

On peut étendre la définition de ν sur l'ensemble des formules logiques à variables dans V.

On définit ainsi $\nu(\varphi)$ par induction structurelle sur φ :

- $\nu(\bot) = 0$;
- $\nu(\top) = 1$;
- $\nu(v) = \nu(v)$, pour tout $v \in V$;
- $\nu(\varphi \wedge \psi) = \nu(\varphi) \times \nu(\psi)$;
- $\nu(\varphi \vee \psi) = \nu(\varphi) + \nu(\psi) - \nu(\varphi) \times \nu(\psi)$;
- $\nu(\neg\varphi) = 1 - \nu(\varphi)$.

Évaluation d'une expression logique

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tables des opérateurs

Voici les **tables** des deux opérateurs $\wedge$ et $\vee$ sur $\{0, 1\}$.

Table de vérité d'une expression logique

Définition (table de vérité)

La **table de vérité** d'une expression logique φ sur V est la donnée des $\nu(\varphi)$ pour toute valuation ν sur V.

On représente en général la table de vérité comme un tableau, les lignes indexées par les valuations, et les colonnes par les éléments de V et φ.

Table de vérité d'une expression logique

Exemple

Voici la **table de vérité** de l'expression suivante, sur $V = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$\varphi = \neg v_1 \vee (v_2 \wedge \neg v_3)$$

v_1	v_2	v_3	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Table de vérité d'une expression logique

Définition (équivalence logique)

Deux expressions φ et ψ sur V sont dites **sémantiquement équivalentes** si elles ont la même table de vérité.

On note $\varphi \equiv \psi$ dans ce cas.

Table de vérité d'une expression logique

Proposition

À équivalence sémantique près, il y a (au plus) 2^{2^n} expressions logiques sur un ensemble de n variables logiques.

Preuve

Il y a 2^n valuations possibles, et deux valeurs possibles (0 ou 1) pour chacune d'entre elles, donc au plus 2^{2^n} tables de vérités associées à des expressions logiques.

Remarque

On verra dans la suite comment construire une expression logique associée à toute table de vérité. Il y a donc exactement 2^{2^n} expressions logiques à équivalence sémantique près.

Sucre syntaxique

Définition (sucre syntaxique)

Il est courant de rajouter des symboles dans notre syntaxe sans augmenter l'expressivité de nos expressions (i.e. les nouvelles expressions obtenues auront toujours un équivalent sémantique n'utilisant que les "anciens" symboles").

Soit φ et ψ deux formules logiques.
On définit le **sucre syntaxique** suivant :

- $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ (**implication**) ;
- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (**équivalence**) ;
- $\varphi \uparrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$ (prononcer "**nand**") ;
- $\varphi \downarrow \psi \equiv \neg(\varphi \vee \psi)$ (prononcer "**nor**") ;
- $\varphi \oplus \psi \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$ (prononcer "**xor**").

Lois de De Morgan

Proposition (lois de De Morgan)

Soit φ et ψ deux formules logiques. On a :

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$;
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Expressions logiques à deux variables

Deux variables

Avec deux variables logiques v_1 et v_2, il y a $16 = 2^{2^2}$ expressions logiques, à équivalence sémantique près.

Dénombrons-les, en fonction du nombre de 1 dans leur table de vérité.

- Sans 1 dans la table de vérité, il y a la formule logique $\bot$.
- Avec un seul 1, il y en a 4 :
  - $v_1 \wedge v_2$;
  - $\neg v_1 \wedge v_2$;
  - $v_1 \wedge \neg v_2$;
  - $\neg v_1 \wedge \neg v_2$.

Expressions logiques à deux variables

Deux variables

Avec deux variables logiques v_1 et v_2, il y a $16 = 2^{2^2}$ expressions logiques, à équivalence sémantique près.

Dénombrons-les, en fonction du nombre de 1 dans leur table de vérité.

- Avec deux 1, il y en a 6 (à équivalence sémantique près) :
  - v_1 ;
  - $\neg v_1$;
  - v_2 ;
  - $\neg v_2$;
  - $v_1 \leftrightarrow v_2$;
  - $v_1 \oplus v_2$.

Expressions logiques à deux variables

Deux variables

Avec deux variables logiques v_1 et v_2, il y a $16 = 2^{2^2}$ expressions logiques, à équivalence sémantique près.

Dénombrons-les, en fonction du nombre de 1 dans leur table de vérité.

- Avec trois 1, il y en a 4 :
  - $v_1 \vee v_2$;
  - $\neg v_1 \vee v_2$;
  - $v_1 \vee \neg v_2$;
  - $\neg v_1 \vee \neg v_2$.
- Avec quatre 1, il y a la formule logique $\top$.

Retour sur le problème de l'introduction

Exemple

On reprend le problème de l'introduction, en notant x la variable logique indiquant que x prend un dessert.

Reformulons ces propositions en expressions logiques en les variables A, B et C :

- si A prend un dessert, B aussi : $A \to B$;
- Soit B, soit C prend un dessert, mais pas les deux : $B \oplus C$;
- A ou C prend un dessert : $A \vee C$;
- si C prend un dessert, A aussi : $C \to A$.

Retour sur le problème de l'introduction

A	B	C	$A \to B$	$B \oplus C$	$A \vee C$	$C \to A$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Exemple

Dressons la table de vérité de ces 4 formules logiques avec $V = \{A, B, C\}$.

Retour sur le problème de l'introduction

A	B	C	$A \to B$	$B \oplus C$	$A \vee C$	$C \to A$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Exemple

La ligne en orange correspond à la seule valuation pour laquelle l'évaluation des quatre formules logiques donne 1.

Retour sur le problème de l'introduction

A	B	C	$A \to B$	$B \oplus C$	$A \vee C$	$C \to A$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Exemple

On en déduit que A et B prennent un dessert, et pas C.

Tautologies, antilogies, et formules satisfiables

Tautologies, antilogies, et formule satisfiables

Définition (tautologie, antilogie, formule satisfiable)

Soit φ une formule de la logique propositionnelle sur un ensemble de variables V. On dit que :

- φ est une **tautologie** si pour toute valuation ν, $\nu(\varphi) = 1$;
- φ est une **antilogie** si pour toute valuation ν, $\nu(\varphi) = 0$;
- φ est **satisfiable** s'il existe une valuation ν telle que $\nu(\varphi) = 1$.

Dans ce dernier cas, on dit que φ est **satisfaite** par ν, ou encore que ν est un **modèle** de φ, et on note $\nu \models \varphi$.

Tautologies, antilogies, et formule satisfiables

Remarques

- On dit aussi formule **valide** pour une tautologie, ou formule **fausse** pour une antilogie.
- Une antilogie est donc une formule qui n'a pas de modèle.
- Une formule valide est une donc une formule pour laquelle toute valuation est un modèle.
- φ est une tautologie $\iff$ $\varphi \equiv \top$.
- φ est une antilogie $\iff$ $\varphi \equiv \bot$.

Ces trois définitions sont en fait reliées de la manière suivante :

- φ est une tautologie $\iff$ $\neg\varphi$ est une antilogie ;
- φ est une antilogie $\iff$ φ n'est pas satisfiable.

Table de vérité d'une expression logique

Définition (conséquence logique)

Soit φ et ψ deux formules logiques.

On dit que φ est une **conséquence logique** de ψ si, pour toute valuation ν, $\nu \vDash \psi \Rightarrow \nu \vDash \varphi$.

On note $\psi \vDash \varphi$ dans ce cas.

Définition (conséquence logique)

Soit φ une formule logique, et Γ un ensemble de formules.

On dit que φ est une **conséquence logique** de Γ si, pour toute valuation ν, pour toute formule $\psi \in \Gamma$, $\nu \vDash \psi \Rightarrow \nu \vDash \varphi$.

On note $\Gamma \vDash \varphi$ dans ce cas.

Tautologies, antilogies, et formule satisfiables

Remarques

- $\psi \vDash \varphi$ revient à dire que $\psi \to \varphi$ est une **tautologie**.
- $\Gamma \vDash \varphi$ revient à dire que $\left(\bigwedge_{\psi \in \Gamma} \psi\right) \to \varphi$ est une **tautologie**.
- Si φ est **valide**, elle est la conséquence logique d'un ensemble vide de formules. C'est pourquoi on note souvent $\vDash \varphi$ pour dire que φ est valide.

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Tautologies

Il est utile de posséder une liste de tautologies, bien qu'il soit impossible de "toutes" les lister, car elles sont en nombre infini.

Donnons-en quelques une, mais commençons d'abord par une proposition.

Opération de substitution

Définition (substitution)

Soit φ et ψ deux formules sur un ensemble de variables propositionnelles V, soit $v \in V$.

La **substitution** de v par ψ dans φ, notée $\varphi[\psi/v]$, est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de v dans φ par ψ. On peut définir $\varphi[\psi/v]$ par induction :

- $\top[\psi/v] = \top$ et $\bot[\psi/v] = \bot$;
- $v[\psi/v] = \psi$;
- $v'[\psi/v] = v'$ pour $v' \neq v$;
- $(\neg\varphi)[\psi/v] = \neg(\varphi[\psi/v])$;
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\psi/v] = (\varphi_1[\psi/v]) \wedge (\varphi_2[\psi/v])$;
- $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[\psi/v] = (\varphi_1[\psi/v]) \vee (\varphi_2[\psi/v])$.

Opération de substitution

Notation

Si l'on veut effectuer plusieurs substitutions à la fois, on note $\varphi[\psi_1/v_1, \ldots, \psi_n/v_n]$.

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Proposition

Si φ est une tautologie en les variables $v_1, \ldots, v_n$, et $\psi_1, \ldots, \psi_n$ des formules logiques sur un ensemble de variables W, alors $\varphi[\psi_1/v_1, \ldots, \psi_n/v_n]$ est une tautologie en les variables de W.

Preuve

Soit $w_1, \ldots, w_p$ les variables de W intervenant dans les ψ_i.
Prenons une valuation ν sur $\{w_1, \ldots, w_p\}$.
Notons ν' la valuation sur $\{v_1, \ldots, v_n\}$ telle que $\nu'(v_i) = \nu(\psi_i)$.
On a $\nu(\varphi[\psi_1/v_1, \ldots, \psi_n/v_n]) = \nu'(\varphi) = 1$ car φ est une tautologie. Ainsi, pour tout ν, on a $\nu \vDash \varphi[\psi_1/v_1, \ldots, \psi_n/v_n]$, donc $\varphi[\psi_1/v_1, \ldots, \psi_n/v_n]$ est une tautologie.

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Remarque

Il en va de même pour une antilogie, mais pas pour une formule satisfiable.

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Exemple

Voici une liste de tautologies célèbres.

La proposition précédente nous indique que l'on peut remplacer les variables par n'importe quelle formule, et obtenir une formule valide.

- négation de la négation : $\neg\neg v \leftrightarrow v$;
- équivalence à vrai/faux : $(v \leftrightarrow \top) \leftrightarrow v$ et $(v \leftrightarrow \bot) \leftrightarrow \neg v$;
- idempotence : $(v \wedge v) \leftrightarrow v$ et $(v \vee v) \leftrightarrow v$;
- implication et équivalence d'une même variable : $(v \to v) \leftrightarrow \top$ et $(v \leftrightarrow v) \leftrightarrow \top$;
- commutativité : $v_1 \wedge v_2 \leftrightarrow v_2 \wedge v_1$, et de même avec tous les autres opérateurs binaires sauf $\to$.
- équivalence des négations : $(\neg v_1 \leftrightarrow \neg v_2) \leftrightarrow (v_1 \leftrightarrow v_2)$;

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Exemple

Voici une liste de tautologies célèbres.

La proposition précédente nous indique que l'on peut remplacer les variables par n'importe quelle formule, et obtenir une formule valide.

- lois de De Morgan : $\neg(v_1 \wedge v_2) \leftrightarrow \neg v_1 \vee \neg v_2$ et $\neg(v_1 \vee v_2) \leftrightarrow \neg v_1 \wedge \neg v_2$;
- associativité : $(v_1 \vee (v_2 \vee v_3)) \leftrightarrow ((v_1 \vee v_2) \vee v_3)$, et de même avec $\wedge$, $\oplus$, et $\leftrightarrow$;
- distributivité de $\vee$ sur $\wedge$: $(v_1 \vee (v_2 \wedge v_3)) \leftrightarrow (v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee v_3)$;
- distributivité de $\wedge$ sur $\vee$: $(v_1 \wedge (v_2 \vee v_3)) \leftrightarrow (v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3)$;

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Exemple

Voici une liste de tautologies célèbres.

La proposition précédente nous indique que l'on peut remplacer les variables par n'importe quelle formule, et obtenir une formule valide.

- transitivité : $((v_1 \to v_2) \wedge (v_2 \to v_3)) \to (v_1 \to v_3)$;
- simplification :
  - $(v_1 \vee (v_1 \wedge v_2)) \leftrightarrow v_1$;
  - $(v_1 \vee (\neg v_1 \wedge v_2)) \leftrightarrow v_1 \vee v_2$;
  - $(v_1 \wedge (v_1 \vee v_2)) \leftrightarrow v_1$;
  - $(v_1 \wedge (\neg v_1 \vee v_2)) \leftrightarrow v_1 \wedge v_2$;

Les tautologies : la base du raisonnement mathématique

Exemple

Voici les bases du raisonnement mathématique :

- tiers exclus : $(v \vee \neg v) \leftrightarrow \top$, et $(v \wedge \neg v) \leftrightarrow \bot$;
- contraposée : $(v_1 \to v_2) \leftrightarrow (\neg v_2 \to \neg v_1)$;
- double implication : $((v_1 \to v_2) \wedge (v_2 \to v_1)) \leftrightarrow (v_1 \leftrightarrow v_2)$;
- disjonction de cas : $((v_1 \to v_2) \wedge (\neg v_1 \to v_2)) \to v_2$;
- démonstration par l'absurde : $(\neg v_1 \to \bot) \to v_1$;
- modus ponens : $(v_1 \wedge (v_1 \to v_2)) \to v_2)$.

Formes normales

Formes normales

Forme normale

Soit φ une formule logique.

On cherche à trouver une formule sémantiquement équivalente à φ de la forme la plus “simple” possible.

Formes normales conjonctives et disjonctives

Définition (littéral)

Soit V un ensemble de variables logiques. On appelle **littéral** de V une expression logique de la forme v ou $\neg v$, pour $v \in V$.

Définition (forme normale disjonctive)

On dit qu'une formule est en **forme normale disjonctive** si c'est une disjonction de conjonctions de littéraux.

Exemple

Avec $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, la formule logique :

$$\varphi = (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2)$$

est sous **forme normale disjonctive** : c'est une disjonction de deux conjonctions de littéraux.

Formes normales conjonctives et disjonctives

Définition (clause)

On appelle **clause** une disjonction de littéraux.

Définition (forme normale conjonctive)

On dit qu'une formule est en **forme normale conjonctive** si c'est une conjonction de clauses (i.e. une conjonction de disjonctions de littéraux).

Exemple

$$\varphi = v_1 \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee \neg v_2)$$

est sous **forme normale conjonctive**, composée de trois clauses à 1, 2 et 3 littéraux.

Formes normales conjonctives et disjonctives

Remarque

En général, on suppose que les variables apparaissant dans une clause ou une conjonction de littéraux sont toutes différentes.

En effet :

- d'une part on peut utiliser l'idempotence des opérateurs $\wedge$ et $\vee$ pour supprimer les littéraux égaux ;
- et d'autre part :
  - une conjonction de littéraux comportant v et $\neg v$ est sémantiquement équivalente à $\bot$;
  - une clause comportant v et $\neg v$ est sémantiquement équivalente à $\top$.

Formes normales conjonctives et disjonctives

Remarque

$\bot$ est le neutre pour $\vee$, et $\top$ est le neutre pour $\wedge$.

On considère donc $\bot$ comme une disjonction et $\top$ comme une conjonction.

Mise sous forme canonique

Forme canonique

Sans hypothèses supplémentaires, il existe plusieurs (une infinité, en fait) formes normales disjonctives ou conjonctives équivalentes à une formule logique donnée.

Les formes normales sont en pratique fournies en entrée des algorithmes décidant si une formule logique est satisfiable (resp. une tautologie ou une antilogie) : il faut donc être capable de mettre une formule sous forme normale.

Avant de décrire une algorithme de mise sous forme normale conjonctive ou disjonctive, prouvons l'existence d'une telle écriture.

Mise sous forme normale

Théorème

Soit φ une formule logique sur un ensemble de variables $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Alors φ est **sémantiquement équivalente** à une **disjonction de conjonctions de littéraux**, et à une **conjonction de clauses**.

Mise sous forme normale

Lemme

La négation d'une conjonction de disjonctions est une disjonction de conjonctions, et réciproquement.

Preuve

Il suffit d'appliquer les lois de De Morgan.

Mise sous forme normale

Preuve du théorème

Montrons le théorème par induction structurelle sur φ.

- $\bot$ est une disjonction (sans conjonction) ; c'est également une conjonction (d'une seule disjonction vide) ;
- $\top$ est une conjonction (sans disjonction) ; c'est également une disjonction (d'une seule conjonction vide) ;
- Pour $v \in V$, v et $\neg v$ sont des conjonctions d'une conjonction à un littéral, ainsi que des disjonctions de conjonctions à un littéral ;
- Si φ admet de telles écritures, c'est également le cas pour $\neg\varphi$ d'après le lemme précédent ;

Mise sous forme normale

Preuve du théorème

- Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$:
  - par hypothèse d'induction, $\varphi_i \equiv \tilde{\varphi}_i$ avec $\tilde{\varphi}_i$ sous forme normale conjonctive. Ainsi, $\varphi \equiv \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \wedge \tilde{\varphi}_2$, et $\tilde{\varphi}$ est bien sous forme normale conjonctive.
  - par hypothèse d'induction, φ_i admet également une écriture en forme normale disjonctive, donc $\varphi_i \equiv c_1^i \vee \cdots \vee c_{n_i}^i$, avec les c_k^i des conjonctions de littéraux. Alors, en utilisant la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$, on obtient :

$$\varphi \equiv \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n_1} c_i^1 \right) \wedge \left(\bigvee_{1 \leq j \leq n_2} c_j^2 \right) \equiv \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq n_2}} c_i^1 \wedge c_j^2$$

Mise sous forme normale

Preuve du théorème

- On peut éliminer les littéraux en doublons dans chaque conjonction $c_i^1 \wedge c_j^2$ obtenue, et éliminer totalement les conjonctions contenant une variable et sa négation.
- le cas $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ est analogue, en échangeant les cas des conjonctions et des disjonctions, et les $\wedge$ et les $\vee$.

Mise sous forme normale

Algorithme

La démonstration du théorème précédent fournit une méthode pour calculer une forme normale, (conjonctive ou disjonctive). Il suffit :

- de supprimer les $\bot$ et les $\top$;
- de reformuler les $\rightarrow$, $\oplus$, etc à l'aide de $\wedge$, $\vee$, et $\neg$;
- d'utiliser les lois de De Morgan pour faire descendre les $\neg$ dans les littéraux (au niveau des feuilles de l'arbre syntaxique) ;
- d'utiliser la distributivité de $\vee$ sur $\wedge$ et celle de $\wedge$ sur $\vee$;
- de simplifier en éliminant les doublons de littéraux dans une clause/conjonction de littéraux, et en utilisant les relations $v \wedge \neg v \equiv \bot$ et $v \vee \neg v \equiv \top$.

Mise sous forme normale

Exemple

Mettons le problème de l'introduction sous **forme normale conjonctive** :

$$\varphi = (A \to B) \wedge (B \oplus C) \wedge (A \vee C) \wedge (C \to A)$$

On reformule d'abord les opérateurs autre que $\neg$, $\wedge$ et $\vee$:

- $A \to B \equiv \neg A \vee B$;
- $B \oplus C \equiv (B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C)$;
- $C \to A \equiv \neg C \vee A$.

Mise sous forme normale

Exemple

La formule obtenue est quasiment sous **forme normale conjonctive**, il ne reste plus qu'à appliquer les lois de De Morgan sur la formule issue de $B \oplus C$:

$$\begin{aligned} B \oplus C &\equiv (B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C) \\ &\equiv (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$

La formule obtenue est bien sous **forme normale conjonctive** : il y a 5 clauses à 2 littéraux.

Mise sous forme normale

Exemple

$$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$

Repartons de cette formule pour obtenir une **forme normale disjonctive**. On utilise maintenant la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$:

$$\begin{aligned}(A \vee C) \wedge (\neg C \vee A) &\equiv (A \wedge \neg C) \vee (A \wedge A) \vee (C \wedge \neg C) \vee (A \wedge C) \\ &\equiv A \vee (A \wedge \neg C) \vee (A \wedge C) \text{ car } A \wedge A \equiv A \\ &\qquad\qquad \text{et } C \wedge \neg C \equiv \bot \\ &\equiv A \quad \text{(règle de simplification)}\end{aligned}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge A \equiv A \wedge B \quad \text{(règle de simplification)}$$

Mise sous forme normale

Exemple

Finalement, en utilisant les règles de simplification :

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv A \wedge B \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \\ &\equiv A \wedge B \wedge (\neg B \vee \neg C) \\ &\equiv A \wedge B \wedge \neg C\end{aligned}$$

Cette dernière expression est à la fois sous **forme normale disjonctive** (une seule conjonctive de 3 littéraux), et sous **forme normale conjonctive** (conjonction de 3 clauses comportant un unique littéral).

Mise sous forme normale

Remarque

On remarque via l'exemple précédent qu'une forme normale n'est pas unique (on a montré deux formes normales conjonctives équivalentes à la formule initiale).

De plus, il n'est pas toujours facile d'obtenir une forme normale, car celle-ci peut être de taille exponentielle en la formule initiale.

Mise sous forme normale

Exemple

Soit $V = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$.

L'expression suivante est sous **forme normale disjonctive**, de taille $O(n)$:

$$\varphi = (x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2) \vee \cdots \vee (x_n \wedge y_n)$$

On peut montrer qu'une **forme normale conjonctive** équivalente est :

$$\varphi \equiv \bigwedge_{\substack{z_i \in \{x_i, y_i\} \\ 1 \leq i \leq n}} (z_1 \vee z_2 \vee \cdots \vee z_n)$$

Cette formule comporte 2^n clauses, et on peut montrer qu'on ne peut pas trouver plus petit.

Mise sous forme normale

Remarque

Il est courant d'alléger les expressions pour utiliser des formes arithmétiques plus proches de celles qu'on utilise habituellement, ce qui a l'avantage de simplifier les écritures lorsqu'on travaille à équivalence sémantique près.

Ainsi :

- on remplace $\bot$ par 0 et $\top$ par 1 ;
- on remplace $\wedge$ par $\cdot$ (voire rien du tout) ;
- on remplace $\vee$ par $+$;
- on écrit $\bar{v}$ à la place de $\neg v$;
- on s'autorise à écrire $=$ à la place de $\equiv$.

Mise sous forme normale

Remarque

Cette forme rend plus intuitive la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$. Il ne faut cependant pas oublier l'autre distributivité, l'absorbance de 1 pour $\vee$, l'idempotence, le fait que $a + \bar{a} = 1$, $a\bar{a} = 0$, et les autres règles de simplification.

Exemple

$$\begin{aligned}(a+b)(a+\bar{b}+c) &= a^2 + ab + a\bar{b} + b\bar{b} + ac + bc \\ &= a(1 + b + \bar{b} + c) + bc \\ &= a + bc\end{aligned}$$

Formes normales conjonctives et disjonctives canoniques

Forme canonique

Il est possible d'assurer l'**unicité** d'une forme normale conjonctive ou disjonctive, en rajoutant une condition sur les conjonctions et disjonctions de littéraux : celles-ci doivent être de taille **maximale**.

Commençons par les **formes normales disjonctives canoniques**.

Formes normales disjonctives canoniques

Définition (min-terme)

Soit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de variables logiques.

Un **min-terme** sur V est une conjonction de n littéraux dans laquelle chaque variable apparait exactement une fois.

Exemple

Avec $n = 3$:

- $\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$ est un min-terme ;
- $v_1 \wedge \neg v_2$ et $v_1 \wedge \neg v_1 \wedge v_2$ n'en sont pas.

Formes normales disjonctives canoniques

Proposition

La table de vérité d'un min-terme contient un seul 1.

Preuve

En effet, pour m un min-terme, le seul modèle ν tel que $\nu \models m$ est celui donné par la valuation suivante :

$$\nu(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ apparait dans } m \\ 0 & \text{si } \neg v_i \text{ apparait dans } m \end{cases}$$

Formes normales disjonctives canoniques

Théorème (forme normale disjonctive canonique)

Soit φ une formule logique sur un ensemble fini de variables V. Alors φ est sémantiquement équivalente à une **unique** (à l'ordre près) disjonction de min-termes différents (deux min-termes sont considérés comme différents si les littéraux qui apparaissent dans la conjonction diffèrent).

Formes normales disjonctives canoniques

Preuve

Pour l'existence, on vérifie que :

$$\varphi \equiv \bigvee_{\nu \mid \nu \vDash \varphi} m_\nu$$

où m_ν est le min-terme associé à la valuation ν, défini par $m_\nu = l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$, avec :

$$l_i = \begin{cases} v_i & \text{si } \nu(v_i) = 1 \\ \neg v_i & \text{si } \nu(v_i) = 0 \end{cases}$$

Formes normales disjonctives canoniques

Preuve

Pour l'unicité, il suffit de voir que si ν est une valuation telle que $\nu \vDash \varphi$, alors m_ν est le seul min-terme tel que $\nu \vDash m_\nu$, il doit donc apparaitre dans la décomposition.

Réciproquement, si $\nu \nvDash \varphi$, alors m_ν ne peut apparaitre dans l'écriture.

Formes normales disjonctives canoniques

Définition (forme normale disjonction canonique)

$$\varphi \equiv \bigvee_{\nu \mid \nu \vDash \varphi} m_\nu$$

La formule logique de la preuve précédente est appelée la **forme normale disjonctive canonique** (abrégée en **FNDC**) sémantiquement équivalente à φ.

Construction

On peut paraphraser la preuve précédente en disant que pour trouver la **FNDC** équivalente à φ, il suffit de regarder la table de vérité de φ : chaque ligne avec un 1 fournit un min-terme apparaissant dans la décomposition.

Formes normales disjonctives canoniques

Exemple

$$\varphi = (A \to B) \wedge (B \oplus C) \wedge (A \vee C) \wedge (C \to A)$$

$\varphi \equiv A \wedge B \wedge \neg C$ est la **FNDC** de la formule ci-dessus.

Elle n'est composée que d'un seul min-terme.

Formes normales disjonctives canoniques

Exemple

Considérons $\varphi = (v_1 \to \neg v_2) \wedge (v_1 \vee v_3)$.
Dressons sa table de vérité :

v_1	v_2	v_3	$v_1 \to \neg v_2$	$v_1 \vee v_3$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Ainsi :

$$\varphi \equiv (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3)$$

Formes normales disjonctives canoniques

Remarque

Cette écriture en **FNDC** permet de montrer qu'il y a bien 2^{2^n} formules logiques sur un ensemble de n variables, à équivalence sémantique près.

Formes normales conjonctives canoniques

Lien avec la partie précédente

La négation établit une **dualité** entre les **formes normales disjonctives** et les **formes normales conjonctives**.

Ce qui suit est dont très proche de ce qu'on vient de voir sur les **FNDC**.

Formes normales conjonctives canoniques

Définition (max-terme)

Un **max-terme** sur un ensemble de n variables est une disjonction de n littéraux dans laquelle chaque variable apparait exactement une fois.

Proposition

La négation d'un min-terme est un max-terme, et réciproquement.

Preuve

C'est une simple application de la loi de De Morgan.

Formes normales conjonctives canoniques

Proposition

La table de vérité d'un max-terme ne contient qu'un seul 0.

Preuve

Immédiat, par négation.

Formes normales conjonctives canoniques

Théorème (forme normale conjonctive canonique)

Une formule logique sur un ensemble fini de variables V est sémantiquement équivalente à une **unique** conjonction de **max-termes** différents.

Définition (forme normale conjonctive canonique)

Cette écriture se nomme la **forme normale conjonctive canonique** (abrégée en **FNCC**).

Formes normales conjonctives canoniques

Preuve

Soit φ une formule logique sur V.

Considérons la forme normale canonique de $\neg\varphi$:

$$\neg\varphi \equiv \bigvee_{\nu \mid \nu \vDash \neg\varphi} m_\nu$$

Ainsi, par négation :

$$\varphi \equiv \bigwedge_{\nu \mid \nu \nvDash \varphi} (\neg m_\nu)$$

Et chacun des $\neg m_\nu$ est un max-terme.

Formes normales conjonctives canoniques

Construction

Pour trouver la **FNCC** équivalente à φ, il suffit de regarder la table de vérité : chaque ligne avec un 0 fournit un max-terme $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$ apparaissant dans la décomposition, avec :

$$l_i = \begin{cases} \neg v_i & \text{si } \nu(v_i) = 1 \\ v_i & \text{si } \nu(v_i) = 0 \end{cases}$$

Formes normales conjonctives canoniques

Exemple

$$\varphi = (A \to B) \wedge (B \oplus C) \wedge (A \vee C) \wedge (C \to A)$$

La **FNCC** de la formule ci-dessus est composée de 7 max-termes : tous sauf $\neg A \vee \neg B \vee C$.

Formes normales conjonctives canoniques

Exemple

La **FNCC** de $\varphi = (v_1 \to \neg v_2) \wedge (v_1 \vee v_3)$ s'obtient en regardant les 0 dans la table de vérité :

v_1	v_2	v_3	$v_1 \to \neg v_2$	$v_1 \vee v_3$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

$$\varphi \equiv (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3)$$

Application aux problèmes de décision

Problème de décision

À partir d'une **forme normale canonique** (conjonctive ou disjonctive), il est facile de décider si une formule logique est satisfiable / valide / insatisfiable.

Application aux problèmes de décision

Proposition

Soit φ une formule logique en un ensemble fini de variables. Alors :

- φ tautologie $\iff$ sa **FNDC** contient tous les min-termes
  $\iff$ sa **FNCC** ne contient aucun max-terme ;
- φ antilogie $\iff$ sa **FNDC** ne contient aucun min-terme
  $\iff$ sa **FNCC** contient tous les max-termes ;
- φ satisfiable $\iff$ sa **FNDC** contient au moins un min-terme
  $\iff$ sa **FNCC** ne contient pas tous les max-termes.

Application aux problèmes de décision

Preuve

Cela provient du fait que les min-termes sont liés aux 1 dans la table de vérité, et les max-termes aux 0.

Application aux problèmes de décision

Remarque

Le problème dans la mise en œuvre pratique (algorithmique) de cette proposition réside dans la taille potentiellement **exponentielle** des formes normales canoniques : le nombre de min-termes dans la **FNDC** additionné au nombre de max-termes dans la **FNCC** fait toujours 2^n, avec n le nombre de variables, donc au moins l'une des deux est de taille **exponentielle** en n.

Il n'est donc en général pas facile (**algorithmiquement**) de calculer ces formes normales canoniques.

Le problème SAT

Problèmes de décision

Problème de décision

Soit E un ensemble. Un **problème de décision** est une question sur les éléments de E dont la réponse est soit "oui", soit "non".

En informatique théorique, il existe deux grands domaines étudiant les problèmes de décision :

- la théorie de la **calculabilité** : étudier s'il existe ou non un algorithme capable de résoudre un problème de décision ;
- la théorie de la **complexité** : si un problème de décision est **décidable** (i.e. il existe un algorithme qui le résout) :
  - Que peut-on dire sur sa complexité ?
  - Quels sont les problèmes de décision de difficulté équivalente ?

Problèmes de décision

Exemple : Problème de l'arrêt

On a vu en DS que le **problème de l'arrêt** est **indécidable** : il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si un autre algorithme va terminer ou non.

Le problème SAT

SAT

Entrée : une formule logique φ sur $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Question : φ est-elle satisfiable ?

Le problème SAT

Le problème **SAT** (pour **satisfiabilité**) est le **problème de décision** ci-dessus.

Nous aimerions trouver un algorithme décidant ce problème, et, si φ est satisfiable, fournissant également une valuation ν telle que $\nu \vDash \varphi$.

Le problème SAT

Idée

Une idée pour résoudre ce problème est de tester toutes les valuations. On obtient un algorithme de complexité $\mathcal{O}(2^n \ell)$, avec ℓ la taille de φ. Mais peut-on faire mieux ?

L'idéal serait un algorithme de complexité **polynomiale** dans le pire des cas, i.e. en $\mathcal{O}((n+\ell)^k)$ pour un certain $k > 0$.

Considérons d'abord une restriction du problème.

Le problème SAT

Définition (p-clause)

Soit V un ensemble fini de variables. On rappelle qu'une **clause** est une disjonction de littéraux sur V, où chaque variable apparait au plus une fois.

On dit que c'est une p-**clause** si p variables apparaissent exactement.

p-SAT

Entrée : une formule logique φ qui est une conjonction de p-clauses.

Question : φ est-elle satisfiable ?

Le problème SAT

Exemple

$$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$

L'expression ci-dessus obtenue lors de l'étude du problème de l'introduction est une instance du problème 2-**SAT**.

Le problème SAT

Proposition

Le nombre de p-clauses sur un ensemble à n variables est polynomial en n, à p fixé.

Preuve

En effet, il y a exactement $\binom{n}{p} \cdot 2^p$ p-clauses différentes : le facteur $\binom{n}{p}$ correspond au choix des variables apparaissant dans la clause, et le facteur 2^p correspond au choix de v ou $\neg v$ pour chaque variable v apparaissant dans la clause.

Or $\binom{n}{p} \cdot 2^p = \frac{2^p}{p!} \times n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \mathcal{O}(n^p)$ à p fixé.

Le problème SAT

Complexité

"Existe-t-il un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n^k)$ pour le problème p-**SAT**, avec $k > 0$?"

À l'heure actuelle, voici ce qu'on sait :

- si $p = 1$, oui : il suffit que la formule ne contienne pas à la fois v_i et $\neg v_i$;
- si $p = 2$, oui : on va voir un algorithme utilisant de l'algorithmique des graphes ;
- si $p \geq 3$, on ne sait pas, mais la réponse est la même que pour le problème **SAT**.

Le problème SAT

3-SAT vs SAT

En fait, on peut montrer que le problème 3-**SAT** est aussi dur que les problèmes p-**SAT** et même que le problème **SAT** lui-même (si l'on sait résoudre 3-**SAT** avec un algorithme de complexité polynomiale, on peut résoudre en temps polynomial en la taille de l'entrée les problèmes p-**SAT** ou même **SAT**).

P vs NP

Vous reparlerez de tout ça l'an prochain, mais si trouvez un algorithme en **temps polynomial** dans le pire des cas qui résout le problème 3-**SAT** (ou **SAT**), vous avez gagné 1 million de dollars, et sans doute une **médaille Fields** !

Résolution du problème 2-SAT

Résolution du problème 2-SAT

2-SAT

Dans cette partie, φ est une instance du problème 2-**SAT**, c'est à dire une conjonction de 2-clauses (des clauses de la forme $\ell_i \vee \ell_j$, où ℓ_i et ℓ_j sont des littéraux).

On suppose que les variables apparaissant dans les clauses sont distinctes (sinon, on pourrait facilement–et rapidement– simplifier la formule).

Peut-on décider rapidement si φ est satisfiable, et, le cas échéant, calculer une valuation ν satisfaisant φ ?

La réponse est **oui**, et on peut le voir comme une application du calcul des composantes fortement connexes d'un graphe orienté.

Construction d'un graphe à partir d'une instance de 2-SAT

Construction

À partir d'une conjonction de 2-clauses en les variables $v_1, \ldots, v_n$, on construit un graphe à $2n$ sommets étiquetés par les littéraux $v_1, \ldots, v_n, \neg v_1, \ldots, \neg v_n$.

Chaque clause $\ell \vee \ell' \equiv (\neg\ell \to \ell') \wedge (\neg\ell' \to \ell)$: on relie alors les sommets $\neg\ell$ et ℓ' par un arc, ainsi que $\neg\ell'$ et ℓ.

Énumérer les variables logiques dans la formule et construire le graphe s'effectue en temps polynomial en la taille de la formule.

La formule est **satisfiable** si on peut trouver une valuation qui ne crée aucune implication de la forme $Vrai \to Faux$.

Construction d'un graphe à partir d'une instance de 2-SAT

Proposition

Dans le graphe associé à une instance de 2-**SAT**, si $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ sont les littéraux apparaissant dans une **composante fortement connexe**, alors $\{\neg\ell_1, \ldots, \neg\ell_k\}$ est également une **composante fortement connexe**.

Preuve

Par construction du graphe, s'il y a un arc de ℓ à ℓ', alors il y a aussi un arc de $\neg\ell'$ à $\neg\ell$. Ainsi si deux littéraux sont dans la même composante fortement connexe, les littéraux conjugués sont également dans la même composante fortement connexe.

Construction d'un graphe à partir d'une instance de 2-SAT

Remarque

En notant G le graphe ainsi construit, et $\tilde{G}$ le graphe obtenu en échangeant v_i et $\neg v_i$ pour tout i, alors ${}^t\tilde{G} = G$.

À la recherche d'une valuation

Théorème

Une instance φ de 2-**SAT** est **satisfiable** si et seulement si, dans le graphe associé, aucune composante fortement connexe ne contient à la fois une variable logique v et sa négation $\neg v$.

Preuve

La condition est **nécessaire**, car si v et $\neg v$ se trouvent dans la même composante fortement connexe, cela signifie que φ a pour conséquence logique $v \leftrightarrow \neg v$, qui est équivalente à $\bot$: φ n'est donc pas satisfiable.

À la recherche d'une valuation

Preuve

Pour montrer que la condition est **suffisante**, voici une preuve constructive : l'algorithme qui suit construit une valuation ν telle que $\nu \models \varphi$:

- calculer un ordre topologique $C_1, \ldots, C_k$ des composantes fortement connexes ;
- remonter l'ordre topologique à l'envers, en donnant la valeur de vérité 1 aux littéraux apparaissant dans C_i s'ils n'en ont pas déjà.

À la recherche d'une valuation

Preuve

Montrons que cet algorithme de produit aucune implication de la forme $Vrai \rightarrow Faux$.

Puisqu'aux littéraux apparaissant dans une même composante est associée la même valeur de vérité, on peut supposer que dans chacune des composantes apparait un unique littéral.

À la recherche d'une valuation

Preuve

Le graphe a donc $2n$ composantes fortement connexes, qui sont v_i et $\neg v_i$. Considérons une implication $\ell \to \ell'$ présente dans le graphe. Alors l'implication $\neg\ell' \to \neg\ell$ est également présente.

- si ℓ' apparait en dernier dans l'ordre topologique, l'algorithme affecte à ℓ' la valeur $Vrai$, et donc à $\neg\ell'$ la valeur $Faux$. Quelle que soit la valeur de vérité associée à ℓ, les deux implications sont satisfaites ;
- si $\neg\ell$ apparait en dernier, le raisonnement est le même.

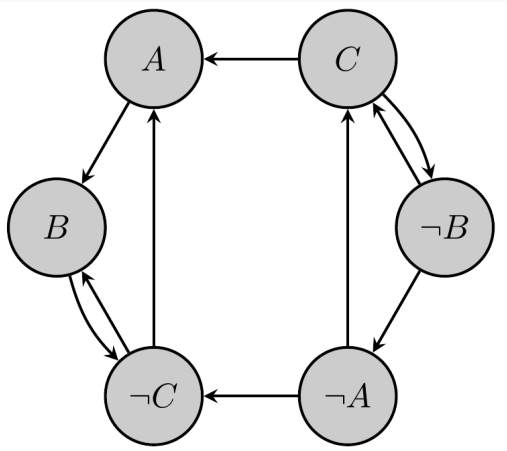
À la recherche d'une valuation

Exemple

$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$

Reprenons le problème de l'introduction, qui donnait l'instance de 2-SAT ci-dessus.

À la recherche d'une valuation



Exemple

$$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$

On obtient le graphe ci-dessus, dont un ordre topologique des composantes fortement connexes est le suivant :

$$\{\neg A, \neg B, C\} \longrightarrow \{A, B, \neg C\}$$

À la recherche d'une valuation

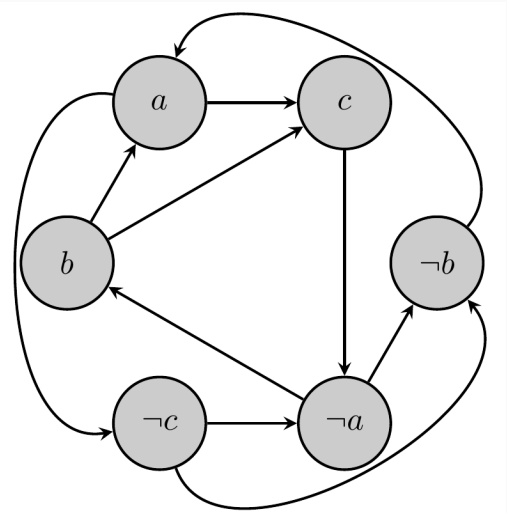
Exemple

$$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$

$$\{\neg A, \neg B, C\} \longrightarrow \{A, B, \neg C\}$$

On obtient alors la valuation $\nu(A) = 1, \nu(B) = 1, \nu(C) = 0$ qui satisfait φ (et c'est d'ailleurs la seule).

À la recherche d'une valuation



Exemple

$$\varphi \equiv (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c)$$

Dans le graphe obtenu pour la formule ci-dessus, les 6 littéraux sont tous dans la même composante fortement connexe : φ n'est donc pas **satisfiable**.

Complexité

Notons c le nombre de clauses apparaissant dans la formule, et n le nombre de variables logiques. Remarquons que $n = \mathcal{O}(c)$.

Le graphe se construit en $\mathcal{O}(n + c) = \mathcal{O}(c)$, et le calcul des composantes fortement connexes et d'un ordre topologique (dans le cas où la formule est satisfiable) se fait également en $\mathcal{O}(n + c) = \mathcal{O}(c)$.
Le calcul d'une valuation se fait ensuite en $\mathcal{O}(n)$.

Ainsi, on obtient un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n+c) = \mathcal{O}(c)$ pour la résolution du problème 2-**SAT**, qui se résout donc en temps **linéaire**.

Algorithme de Quine

Algorithme de Quine

Algorithme de Quine

On présente maintenant un algorithme permettant de décider si une formule de la logique propositionnelle est valide, satisfiable ou insatisfiable : l'**algorithme de Quine**.

Remplacement d'une sous-formule par une formule équivalente

Définition (remplacement d'une sous-formule)

Soit φ une formule logique, et ψ une sous-formule de φ n'apparaissant qu'une fois dans φ.
Soit ψ' une formule logique.
On note $\varphi[\psi := \psi']$ la formule obtenue à partir de φ en remplaçant l'occurrence de ψ par ψ'.

Attention

C'est différent de la **substitution** !

Remplacement d'une sous-formule par une formule équivalente

Propriété

Si $\psi \equiv \psi'$, alors :

- $\neg\psi \equiv \neg\psi'$;
- pour toute formule φ, et pour tout connecteur logique $\diamond$ d'arité 2 :
  - $\varphi \diamond \psi \equiv \varphi \diamond \psi'$;
  - $\psi \diamond \varphi \equiv \psi' \diamond \varphi$.

Remplacement d'une sous-formule par une formule équivalente

Proposition

Soit φ une formule logique, et ψ une sous-formule de φ n'apparaissant qu'une fois dans φ.
Soit ψ' une formule logique telle que $\psi \equiv \psi'$.
Alors on a $\varphi \equiv \varphi[\psi := \psi']$.

Preuve

Immédiat par induction, en utilisant la propriété précédente.

Algorithme de Quine

Règles de simplification de Quine

$$\neg\bot \equiv \top \qquad \neg\top \equiv \bot$$
$$\top \to \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \to \top \equiv \top$$
$$\bot \to \varphi \equiv \top \qquad \varphi \to \bot \equiv \neg\varphi$$
$$\top \vee \varphi \equiv \top \qquad \varphi \vee \top \equiv \top$$
$$\bot \vee \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \vee \bot \equiv \varphi$$
$$\top \wedge \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \wedge \top \equiv \varphi$$
$$\bot \wedge \varphi \equiv \bot \qquad \varphi \wedge \bot \equiv \bot$$
$$\top \leftrightarrow \varphi \equiv \varphi \qquad \varphi \leftrightarrow \top \equiv \varphi$$
$$\bot \leftrightarrow \varphi \equiv \neg\varphi \qquad \varphi \leftrightarrow \bot \equiv \neg\varphi$$

Remarque

Dans chaque équivalence, la formule de droite est toujours de taille **strictement plus petite** que la formule de gauche.

Algorithme de Quine

L'**algorithme de Quine** consiste à construire, à partir de la formule φ qui nous intéresse, un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des formules, à l'aide des règles suivantes :

(1) **Initialisation :** initialiser l'arbre à une racine contenant φ.

(2) **Simplification :** si l'une des règles de simplification de Quine s'applique à l'une des feuilles de l'arbre : faire pousser à cette feuille une nouvelle feuille contenant sa formule simplifiée, et recommencer (2).

(3) **Bifurcation :** sinon, si l'une des feuilles contient une variable, en choisir une (par exemple la plus fréquente), disons v, et pour chaque feuille φ_i, faire pousser deux feuilles $\varphi_i[\bot/v]$ et $\varphi_i[\top/v]$, et retourner en (2).

Algorithme de Quine

Terminaison

L'algorithme de Quine **termine**.

Preuve

En effet, à chaque application de la règle (3), le nombre de variables diminue strictement, et à chaque application de la règle (2), la taille des formules diminue.

Ainsi, en notant n_v le nombre de variables distinctes présentes dans les feuilles, et n_f la somme des tailles des formules présentes dans les feuilles, la valeur (n_v, n_f) est strictement décroissante pour l'ordre lexicographique à chaque étape de l'algorithme.

Algorithme de Quine

Proposition

Lorsque l'algorithme est fini, toutes les feuilles sont étiquetés par les formules $\top$ ou $\bot$.

Preuve

En effet, il n'y a pas de variables (sinon (3) s'appliquerait), et toute formule ne contenant aucune variable se simplifient en $\top$ ou $\bot$ par les règles de simplification.

Algorithme de Quine

Correction

Soit $\mathcal{A}$ un **arbre de Quine** terminé, dont la racine est φ.

- Toutes les feuilles de $\mathcal{A}$ sont $\top \iff \varphi$ est **valide**.
- Toutes les feuilles de $\mathcal{A}$ sont $\bot \iff \varphi$ est **insatisfiable**.
- Il existe une feuille de $\mathcal{A}$ étiquetée par $\top \iff \varphi$ est **satisfiable**.

Dans ce dernier cas, on peut également obtenir facilement une **valuation** ν telle que $\nu \vDash \varphi$: il suffit de suivre la branche menant à la feuille $\top$ et de respecter les bifurcations effectuées par les applications de la règle (3).

Algorithme de Quine

Lemme

Soit φ une formule logique, et v une variable de φ. On a :

- $(\varphi[\top/v] \equiv \top$ et $\varphi[\bot/v] \equiv \top) \iff \varphi \equiv \top$.
- $(\varphi[\top/v] \equiv \bot$ et $\varphi[\bot/v] \equiv \bot) \iff \varphi \equiv \bot$.
- φ est satisfiable $\iff$ au moins l'une des deux formules $\varphi[\top/v]$ ou $\varphi[\bot/v]$ est satisfiable.

Algorithme de Quine

Preuve

Montrons le théorème par induction structurelle sur $\mathcal{A}$.

- Si l'arbre est réduit à une feuille, puisqu'aucune règle ne s'applique, la formule est forcément $\top$ ou $\bot$: OK.

Algorithme de Quine

Preuve

- Si la règle appliquée à la racine de $\mathcal{A}$ est une simplification de φ à $\varphi' = \varphi[\psi := \psi']$. Alors la racine de $\mathcal{A}$ possède un seul fils : notons $\mathcal{A}'$ ce sous-arbre.

  Les feuilles de $\mathcal{A}$ sont exactement les feuilles de $\mathcal{A}'$, donc par hypothèse d'induction (HI) sur $\mathcal{A}'$:

  $$\begin{aligned} & \text{toutes les feuilles de } \mathcal{A} \text{ sont } \top \\ \iff \quad & \text{toutes les feuilles de } \mathcal{A}' \text{ sont } \top \\ \iff \quad & \varphi' \text{ est valide (HI)} \\ \iff \quad & \varphi \text{ est valide (car } \varphi \equiv \varphi'\text{).} \end{aligned}$$

  (le raisonnement est similaire pour les deux autres cas)

Algorithme de Quine

Preuve

- Si la règle appliquée à la racine est une bifurcation sur une variable v, alors $\mathcal{A}$ possède deux sous-arbres $\mathcal{A}_\top$ et $\mathcal{A}_\bot$ étiquetés par $\varphi[\top/v]$ et $\varphi[\bot/v]$.
  - Si toutes les feuilles de $\mathcal{A}$ sont $\top$, alors toutes les feuilles de $\mathcal{A}_\top$ et $\mathcal{A}_\bot$ sont $\top$. Donc, par hypothèse d'induction sur $\mathcal{A}_\top$ et $\mathcal{A}_\bot$, $\varphi[\top/v]$ et $\varphi[\bot/v]$ sont valides. Donc φ est valide (d'après le lemme).
  - De même, si toutes les feuilles de $\mathcal{A}$ sont $\bot$, on obtient que φ est insatisfiable.
  - Si $\mathcal{A}$ possède une feuille $\top$, alors $\mathcal{A}_\top$ ou $\mathcal{A}_\bot$ possède une feuille $\top$. Notons $\mathcal{A}'$ cet arbre, et φ' l'étiquette de sa racine. Par hypothèse d'induction sur $\mathcal{A}'$, φ' est satisfiable, donc φ est satisfiable (d'après le lemme).

Algorithme de Quine

Exemple

$$\varphi = (A \to B) \wedge (B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge (A \vee C) \wedge (C \to A)$$

Appliquer l'algorithme de Quine sur l'exemple de l'introduction.

Algorithme de Quine

Exemple

Il vaut mieux utiliser l'algorithme de Quine pour vérifier si l'énoncé suivant est correct, car la table de vérité de φ contient $2^6 = 64$ lignes et 14 colonnes !

"Si est venu **s**eul, il a pris le **b**us ou le **t**rain.
S'il a pris le **b**us ou son **a**utomobile, alors il est arrivé en **r**etard et a **m**anqué la réunion.
Il n'est pas arrivé en **r**etard.
Donc s'il est venu **s**eul, il a pris le **t**rain."

$$\varphi = \Big((s \to (b \vee t)) \wedge ((b \vee a) \to (r \wedge m)) \wedge \neg r \Big) \to (s \to t)$$