

Adressage d'arbres

Samy Jaziri

Sujet de khôlle adapté d'une épreuve pratique d'algorithmique et de programmation du concours commun des écoles normales supérieures : Cartographie d'arbres (2012).

Préambule

*Tous les algorithmes de ce sujet devront être implémentés en **OCaml**.*

Pour vous mettre dans les conditions du concours, vous n'avez pas le droit d'accéder aux ressources en ligne. Une documentation hors-ligne peut être téléchargée à l'adresse suivante en début d'épreuve : <https://kholles.jaziri.eu/doc-ocaml.zip>

Vous indiquerez vos réponses sur la fiche réponse qui vous a été fournie en utilisant, en entrée de vos programmes, le numéro u_0 inscrit sur cette fiche. Vous remettrez cette fiche à l'examineur en fin de séance. Une fiche réponse est mise à disposition à la fin du sujet en tant qu'exemple des réponses attendues pour un \tilde{u}_0 particulier.

En ce qui concerne les questions orales de la khôlle, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez pas expliquer votre code ligne par ligne! Quand la complexité d'un algorithme est demandée en temps ou en mémoire en fonction d'un paramètre n , on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, donné en notation de Landau ($\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(\log(n))$, ...). Prenez des notes lorsque vous préparez une question orale pour retrouver plus rapidement les grandes lignes de votre explication lorsque l'examineur passe vous voir.

Il est recommandé de **tester vos programmes sur des petits exemples** que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe.

Il vous est demandé d'aborder les questions dans l'ordre et de noter vos difficultés à répondre à une question avant de passer à la suivante. Vous pourrez alors les aborder avec l'examineur.

Enfin, il est recommandé de **lire l'intégralité du sujet avant de commencer** afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Introduction

Dans ce sujet, on va chercher des moyens de se déplacer sur des arbres binaires.

Préparer une réponse à donner à l'oral

Exprimez le nombre de nœuds internes d'un arbre binaire entier en fonction de son nombre de feuilles.

Question 1

Après avoir lu l'intégralité du sujet, définissez un type **arbre** pour représenter les arbres binaires de ce sujet.

Préparer une réponse à donner à l'oral

Vous devrez motiver le choix des structures de données utilisées.

Génération d'arbres aléatoires

Considérons $(u_k)_{k \geq 0}$ la suite d'entiers définie par :

$$u_k = \begin{cases} u_0 \text{ (sur votre fiche réponse)} & \text{si } k = 0 \\ 15091 \times u_{k-1} \pmod{64007} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

Question 2

Que valent :

a) u_{10} b) u_{100} c) u_{1000}

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit l'arbre binaire A_n de la façon suivante :

- A_0 est l'arbre réduit à un seul nœud.
- Pour $n > 0$, A_n est un nœud muni de deux sous-arbres :
 - son fils gauche est l'arbre $A_{u_{2n} \pmod n}$
 - son fils droit est l'arbre $A_{u_{2n+1} \pmod n}$

Question 3

Donnez le nombre de nœuds, de feuilles et la hauteur des arbres suivants :

a) A_{10} b) A_{100} c) A_{1000}

Préparer une réponse à donner à l'oral

Préparez la preuve de terminaison, de correction et l'analyse de complexité de votre algorithme.

2 Schéma d'adressage des arbres

Adressage

On veut pouvoir trouver son chemin facilement dans les arbres, c'est-à-dire savoir se déplacer d'un nœud n_i vers un nœud n_j . Pour cela, on munit les nœuds d'une adresse qui permet de savoir facilement comment rejoindre un nœud, ou que l'on soit dans l'arbre.

L'adresse d'un nœud n_i est un couple (l_i, m_i) tels que :

- l_i est le numéro de n_i dans un parcours en profondeur préfixe, en supposant que la racine porte le numéro 0.
- m_i est la plus grande valeur de l_j pour les nœuds n_j du sous-arbre enraciné en n_i .

Question 4

Implémentez l'adressage des nœuds d'un arbre A_n .

Préparer une réponse à donner à l'oral

Préparez une preuve de correction détaillée de l'algorithme que vous utiliserez pour étiqueter l'arbre.

Recherche d'adresse

Question 5

Pour les arbres et les valeurs de l_i suivantes, on donnera les valeurs de m_i telles que (l_i, m_i) est l'adresse d'un nœud n_i de l'arbre :

a) $A_{10}, l_i = 3$ b) $A_{100}, l_i = 9$ c) $A_{1000}, l_i = 30$

Préparer une réponse à donner à l'oral

Quelle est la complexité de votre algorithme ?

Trouver son chemin

Préparer une réponse à donner à l'oral

Expliquez comment trouver son chemin d'un nœud n_i à un nœud n_j dans l'arbre grâce à l'adressage de l'arbre.

Question 6

Donnez la distance parcourue, en nombre de nœuds traversés, lorsqu'on se déplace sur les arbres suivants du nœud n_i au nœud n_j , donnés par leurs valeurs l_i et l_j (si $n_i = n_j$, on considérera que cette distance vaut zéro)

a) $A_{10}, l_i = 3$ et $l_j = 9$ b) $A_{100}, l_i = 5$ et $l_j = 30$ c) $A_{1000}, l_i = 30$ et $l_j = 90$

Fiche réponse : Adressage d'arbres

Nom, prénom : DOUZ Nadine

 \bar{u}_0 : 12**Question 2:**

- a)
- b)
- c)

Question 3:

- a)
- b)
- c)

Question 5:

- a)
- b)
- c)

Question 6:

- a)
- b)
- c)